1.(1) 与式に含まれる項を変形すると以下のようになる。

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 2(2\sin x\cos x)\cos 2x = 4\sin x\cos x\cos 2x,$$

$$\sin 5x = \sin 4x\cos x + \cos 4x\sin x = (4\sin x\cos x\cos 2x)\cos x + \sin x\cos 4x$$
$$= 4\sin x\cos^2 x\cos 2x + \sin x\cos 4x$$

これらを用いて与式を変形すると次のようになる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x - \sin 5x}{3\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos x\cos 2x - 4\sin x\cos^2 x\cos 2x - \sin x\cos 4x}{3\sin x\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\cos x\cos 2x - 4\cos^2 x\cos 2x - \cos 4x}{3\cos x} = \frac{4-4-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

以上から求める値は次のようになる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x - \sin 5x}{3\sin x\cos x} = -\frac{1}{3} \quad //$$

1.(2) 与えられた連立方程式を10進数で表すと次のようになる。

$$\begin{cases} 100101_{(2)}x - 110011_{(2)}y = 1001100_{(2)} \\ 10001_{(2)}x - 10111_{(2)}y = 101100_{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 37x - 51y = 76 \\ 17x - 23y = 44 \end{cases}$$

まず、xの値を求めるため、次の方程式を解く。

$$(37x-76)/51 = (17x-44)/23 \quad \cdots x = 31$$

次にyの値を求める。

$$y = (37\cdot 31 - 76)/51 \quad \cdots y = 21$$

x, yの値が求められたので、これを2進数に変換する。

$$x = 31 = 16+8+4+2+1 = 2^4+2^3+2^2+2^1+2^0 \quad \cdots x = 11111_{(2)}$$
$$y = 21 = 16+4+1 = 2^4+2^2+2^0 \quad \cdots y = 10101_{(2)}$$

以上から求める解は次のようになる。

$$\begin{cases} x = 11111_{(2)} \\ y = 10101_{(2)} \end{cases} \quad //$$

1.(3) 変数tを$t=2-\sqrt{x}$とおくとdxと積分範囲は以下のようになる。

$$t=2-\sqrt{x}\cdots\sqrt{x}=2-t\cdots x=(2-t)^2\cdots dx=(2t-4)dt$$

x	$0\to4$
t	$2\to0$

これより計算を行うと次のようになる。

$$I=\int_0^4(2-\sqrt{x})^5dx=\int_2^0t^5(2t-4)dt=-\int_0^2(2t^6-4t^5)dt$$

$$=-\left[\frac{2}{7}t^7-\frac{2}{3}t^6\right]_0^2=-\left(\frac{2}{7}\cdot2^7-\frac{2}{3}\cdot2^6\right)$$

$$=2^6\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right)=2^6\cdot\frac{2}{21}=\frac{128}{21}$$

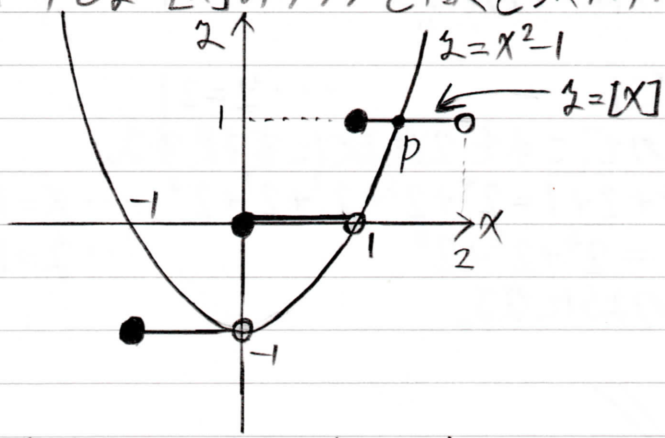
以上から求める値は次のようになる。

$$I=\frac{128}{21}\quad//$$

1.(4) 与えられた方程式を変形すると次のようになる。

$$x^2-1=[x]$$

ここで$y=x^2-1$と$y=[x]$のグラフを描くと以下のようになる。



グラフ内の点Pにおいて方程式が成立する。

$$x^2-1=[x]=1$$

これより上式を解くと求める解は次のようになる。

$$x=\sqrt{2}\quad//$$

1.(5) 与式を変形すると以下のようになる。

$$1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\cdots+\frac{2n+1}{(2n)!}+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{2}{2!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{4}{4!}+\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{6}{6!}+\frac{1}{6!}\right)+\cdots+\left(\frac{2n}{(2n)!}+\frac{1}{(2n)!}\right)+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}+\cdots$$

$$=e$$

以上から求める値は次のようになる。

e //

1.(6)「kagidai」の中では「a」と「i」がそれぞれ2つずつ含まれている。
求めたい「同じアルファベットが隣り合わないものの総数」とは
「同じアルファベットが隣り合うものの総数」を「全ての組み合わせの総数」から
差し引いたものである。つまり、求めたいものを余事象として考える。
ここで計算に必要となる組み合わせの数を以下に示す。なお、同じアルファベットも
異なる文字として計算を行う。

$N(A)$：「a」と「a'」が隣り合うものの総数。 $N(A)=2\times{}_6P_6$

$\underset{\uparrow (a,a')}{A}\, i\, i'\, k\, g\, d$ の順列は ${}_6P_6$。(a',a) も存在するので、さらに2倍。

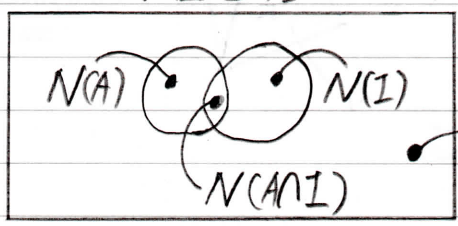
$N(I)$：「i」と「i'」が隣り合うものの総数。$N(I)=2\times{}_6P_6$

$N(A\cap I)$：「a」と「a'」，「i」と「i'」がそれぞれ隣り合うものの総数。

$N(A\cap I)=4\times{}_5P_5$

$\underset{(a,a')\uparrow}{A}\ \underset{\uparrow(i,i')}{I}\ k\, g\, d$ の順列は ${}_5P_5$。(a',a)，(i',i) も存在するので、計4倍。

上記の内容についてベン図を描くと次のようになる。



求めたいものの総数
(a, a', i, i' の区別あり)

(次項に続く)

1.(6続) これより求めたいものの総数(a, a', i, i'の区別あり)を求めると次のようになる。

$$N' = {}_7P_7 - \{N(A)+N(I)-N(A\cap I)\} = {}_7P_7 - \{2\times{}_6P_6 + 2\times{}_6P_6 - 4\times{}_5P_5\}$$
$$= 7! - (4\times 6! - 4\times 5!) = 5!(6\cdot 7 - 4\cdot 6 + 4) = 120\cdot 22$$

最後に「a」と「a'」、「i」と「i'」の区別を取り払うと、求める値は$N'/4$となり次のようになる。

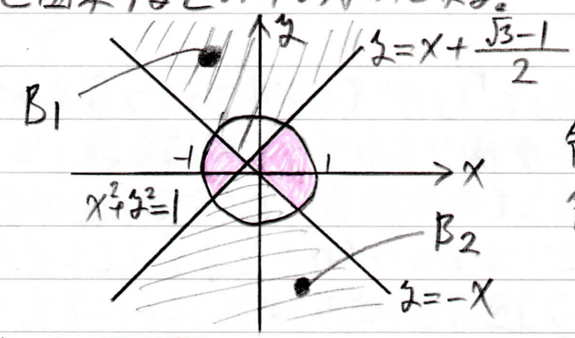
660 //

1.(7) 始めに領域Bについて考える。不等式 $(x+y)(2x-2y+\sqrt{3}-1)<0$ が満たされるのは以下に示す場合である。

B_1: $x+y>0$ かつ $2x-2y+\sqrt{3}-1<0$ … $y>-x$ かつ $y>x+(\sqrt{3}-1)/2$

B_2: $x+y<0$ かつ $2x-2y+\sqrt{3}-1>0$ … $y<-x$ かつ $y<x+(\sqrt{3}-1)/2$

これより領域A, Bを図示すると以下のようになる。



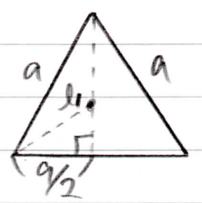
領域B_1, B_2は境界を含まない。

ド・モルガンの法則より $\overline{\overline{A}\cup B} = A\cap\overline{B}$ となるので、面積を求めたい領域は上図の赤色の部分となる。(境界含む)

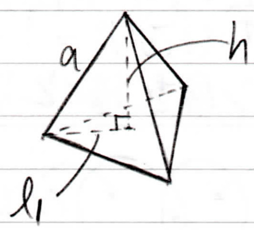
$y=-x$ は円の中心を通っており、また $y=-x$ と $y=x+(\sqrt{3}-1)/2$ は直交しているので $y=-x$ を軸として片方の領域を折り返せば、面積を求めたい領域は半円に一致する。従って求める値は次のようになる。

$\pi/2$ //

1.(8) 必要な作図を行う。



$l_1\cos\frac{\pi}{6} = a/2$
$\cdots l_1 = a/\sqrt{3}$



$h = \sqrt{a^2 - l_1^2}$
$= a\sqrt{2/3}$
$= \sqrt{6}a/3$

以上から求める値は次のようになる。

$\sqrt{6}a/3$ //

2　与えられた複素数 z を式変形すると次のようになる。

$$z=\frac{1}{1+iu}=\frac{(1-iu)}{(1+iu)(1-iu)}=\frac{1-iu}{1+u^2}$$

ここで、複素数 z の実部を x，虚部を y とおくと次のようになる。

$$x=\frac{1}{1+u^2}\qquad y=-\frac{u}{1+u^2}$$

変数 u は実数であるから x の範囲は $0<x\leqq 1$ となる。
また u を x を用いて表すと次のようになる。

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{x}-1}\qquad (0<x\leqq 1)$$

これより y を x の式として表すと次のようになる。

$$y=\mp x\sqrt{\frac{1}{x}-1}=\mp\sqrt{x-x^2}$$

上式の両辺を2乗して式を整理すると以下のようになる。

$$y^2=x-x^2$$

$$x^2-x+y^2=0 \qquad \text{※円の方程式}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

以上より複素数 z が複素数平面上に描く図形は、中心が $(1/2+0i)$ で半径が $1/2$ の円から $(0+0i)$ の点を取り除いたものである。
面積を求める図形は、複素数 z が描く図形に原点を加えた曲線に囲まれる領域になるので、最終的に半径が $1/2$ の円の面積を求める事となる。
従って解は次のようになる。

$$S=\frac{\pi}{4}$$ //

3.(1) 関数 $f(x)$ を微分すると次のようになる。

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

これを用いて増減表を書くと次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	/	↘	e	↗

//

3.(2) 関数 $f(x)$ の変数 x を ± 0 または $\pm\infty$ に近づけた場合の極限は以下のようになる。

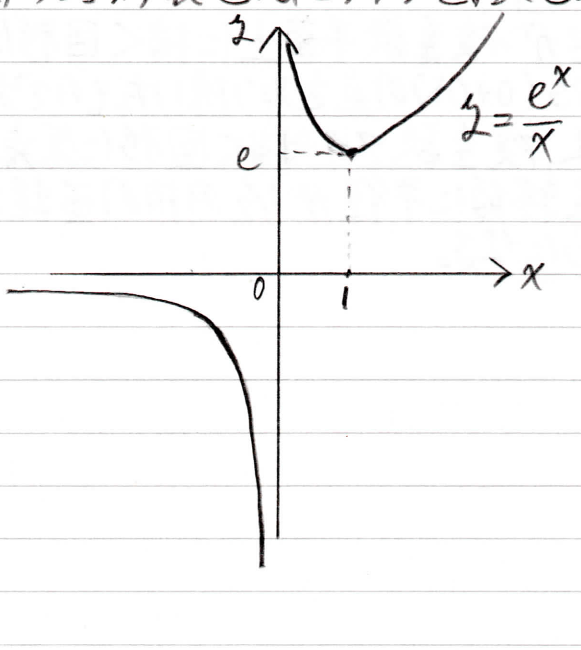
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\cdot e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x\cdot e^x}=-0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{-x\cdot e^x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{-1}{e^x}\right)\cdot\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=(-1)\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+0}(e^x)\cdot\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=(1)\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$ ※指数関数の方が増加の度合が大きい。

上記の内容と前問の増減表を元にグラフを描くと以下のようになる。



藤堂琉季

4.(1) 絶対値の定義から以下の不等式が成立する。

$$-|a| \leqq a \leqq |a| 、\quad -|b| \leqq b \leqq |b|$$

上式の各辺を足し合わせると次のようになる。

$$-(|a|+|b|) \leqq a+b \leqq |a|+|b|$$

ここで以下に示すように場合分けを行う。

(i) $a+b \geqq 0$ の場合

$$0 \leqq a+b \leqq |a|+|b|$$
$$0 \leqq |a+b| \leqq \big||a|+|b|\big| = |a|+|b|$$
$$\therefore |a+b| \leqq |a|+|b|$$

(ii) $a+b<0$ の場合

$$-(|a|+|b|) \leqq a+b < 0$$
$$|-(|a|+|b|)| \geqq |a+b| > 0$$
$$|a|+|b| \geqq |a+b| > 0$$
$$\therefore |a+b| \leqq |a|+|b|$$

上記の(i), (ii)より実数 a, b について不等式 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成立する。//

4.(2) $\sqrt{e}$ が無理数ではない、すなわち $\sqrt{e}$ は有理数であるとして背理法を用いて、$\sqrt{e}$ が無理数である事の証明を行う。

$\sqrt{e}$ が有理数であれば、正の整数 a, b を用いて、$\sqrt{e}$ を次のように表す事ができる。

$$\sqrt{e} = \frac{a}{b}$$

ここで上式の両辺を二乗すると次のようになる。

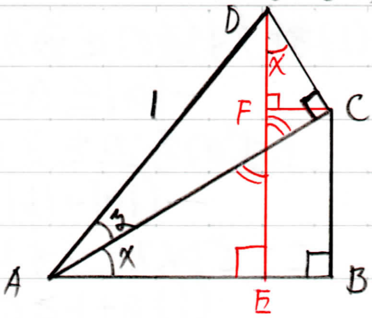
$$e = \frac{a^2}{b^2}$$

上式右辺の a^2, b^2 は共に正の整数であり、右辺はそれらの分数である事から、有理数となっている事が分かる。

しかし、e は無理数なので、上式は(無理数)=(有理数)となって矛盾となる。

以上から始めの仮定「$\sqrt{e}$ は有理数」は誤りとなり、結果として $\sqrt{e}$ は無理数である事が分かる。//

藤学琉季.



4.(3) 証明に必要となる補助線、点、角度を右図に示す。

ここで線分AEの長さを求めると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
AE &= AB - FC \\
&= AC\cos x - DC\sin x \\
&= (AD\cos y)\cos x - (AD\sin y)\sin x \\
&= \cos x\cos y - \sin x\sin y
\end{aligned}
$$

右図において $\cos(x+y)$ は次のように表す事ができる。

$$\cos(x+y) = \frac{AE}{AD} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{1}$$

以上から次式が成立する。

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$ //