大問1　　　　　　　　　　　　　　　　藤紫瑛系

1.(1) 題意より次式が成立する。

$$\sin 1^\circ = \sin(\pi/180) \fallingdotseq \pi/180$$

$\pi = 3.142$として$\pi/180$を計算すると右のようになる。
右の計算から次式が得られる。

$$\pi/180 = 0.0174\dot{5}$$

以上から求める値は次のようになる。

$$\underline{\sin 1^\circ \fallingdotseq 0.0175}\ //$$

後で$\times 10^{-3}$→

```
        17.45
    ----------
180 ) 3142
      180
      ----
      1342
      1260
      ----
        820
        720
        ----
        1000  ←
         900
         ----
         100  ←
```

循環する事が分かる。

1.(2) 与式の両辺の対数をとると次のようになる。

$$\log y = (1/x^2)\log x$$

上式の両辺をxで微分すると以下のようになる。　　※対数微分法

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}(\log y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\log x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y} = -\frac{2}{x^3}\cdot\log x + \frac{1}{x^3} = x^{-3}(1-2\log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot x^{-3}(1-2\log x) = x^{1/x^2}\cdot x^{-3}(1-2\log x) = x^{1/x^2-3}(1-2\log x)$$

得られた式のxにeを代入すると次のようになる。

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e} = e^{1/e^2-3}(1-2\log e) = e^{1/e^2-3}(1-2) = -e^{1/e^2-3}$$

以上から求める値は次のようになる。

$$\underline{-e^{1/e^2-3}}\ //$$

1.(3) xの範囲を分けて与式を整理すると以下のようになる。

$$|2x-3|-3|x-5|+12 = \begin{cases} x & (x<3/2) & \cdots -\infty \sim 3/2 \\ 5x-6 & (3/2 \leqq x < 5) & \cdots 3/2 \sim 19 \\ -x+24 & (5 \leqq x) & \cdots -\infty \sim 19 \end{cases}$$

上記の内容から必要となる不等式を立てて解くと以下のようになる。

$$x<0,\quad -x+24<0 \cdots 24<x$$

以上から求める解は次のようになる。

$$\underline{x<0 \text{ または } 24<x}\ //$$

大問1　　　　　　　　　　　　　　　　　藤峯瑶季

1.(4) 与式を部分積分を用いて計算すると次のようになる。

$$I=\int_1^0 x^2(1-x)^7dx=\int_1^0 x^2\left\{-\frac{1}{8}(1-x)^8\right\}'dx=\left[-\frac{x^2}{8}(1-x)^8\right]_1^0+\frac{1}{4}\int_1^0 x(1-x)^8dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^0 x\left\{-\frac{1}{9}(1-x)^9\right\}'dx=\frac{1}{4}\left[-\frac{x}{9}(1-x)^9\right]_1^0+\frac{1}{36}\int_1^0(1-x)^9dx$$

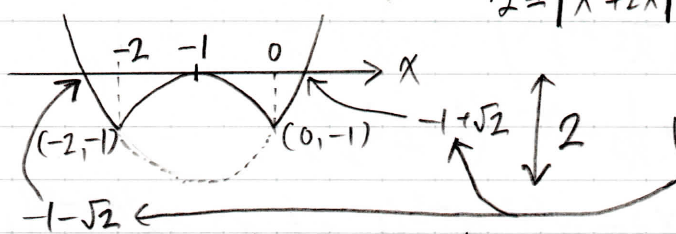
$$=\frac{1}{36}\left[-\frac{1}{10}(1-x)^{10}\right]_1^0=\frac{1}{36}\left(-\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{360}$$

以上から求める値は次のようになる。

$I=-1/360$ //

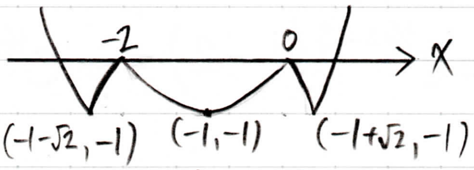
1.(5) 始めに与式に含まれる $|x^2+2x|-1$ のグラフを描くと次のようになる。

$$y=|x^2+2x|-1=|(x+1)^2-1|-1$$



$(x+1)^2-1=1 \cdots x=-1\pm\sqrt{2}$

上のグラフを用いて $||x^2+2x|-1|-1$ のグラフを描くと次のようになる。



上のグラフから求める値は次のようになる。

最小値：-1、xの値：$-1\pm\sqrt{2}$、-1 //

1.(6) 与式の一階微分、二階微分を求めると次のようになる。

$$y'=(e^{ax}\cos x)'=ae^{ax}\cos x-e^{ax}\sin x=e^{ax}(a\cos x-\sin x)$$

$$y''=a^2e^{ax}\cos x-ae^{ax}\sin x-ae^{ax}\sin x-e^{ax}\cos x=e^{ax}(a^2\cos x-2a\sin x-\cos x)$$

上式を恒等式に代入し、整理すると次のようになる。

$$y''-4y'+5y=e^{ax}(a^2\cos x-2a\sin x-\cos x)-4e^{ax}(a\cos x-\sin x)+5e^{ax}\cos x$$

$$=e^{ax}\{(a^2-4a+4)\cos x-2(a-2)\sin x\}$$　　※ $a^2-4a+4=(a-2)^2$

$$=e^{ax}(a-2)\{(a-2)\cos x-2\sin x\}$$

上式がゼロとなるためには $a=2$ である必要がある。

従って、求める定数の値は次のようになる。

$a=2$ //

No.

Date

大問1　　藤柴理系

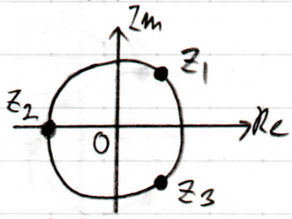
1.(7) 始めに方程式の全ての解を求める。

方程式を変形すると以下のようになる。

$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=0$$

$z=-1$ ↵　↳ $z=(1\pm\sqrt{-3})/2=(1\pm\sqrt{3}i)/2$ ←※解の公式

上記の内容から、解は以下のように表わされる。



$$z_1=(1+\sqrt{3}i)/2=\cos\pi/3+i\sin\pi/3$$

$$z_2=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$z_3=(1-\sqrt{3}i)/2=\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3$$

上記の解を用いて z_1z_2/z_3 (これを z とおく)を計算すると次のようになる。

$$z=\frac{(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)(\cos\pi+i\sin\pi)}{\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3}=\frac{\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3}{\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3}$$

$$=\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)=\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3$$

次に和の計算を行うと以下のようになる。

$$\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)^k=\sum_{k=1}^{2024}z^k=\sum_{k=1}^{2024}z\cdot z^{k-1}=\frac{z(z^{2024}-1)}{z-1}$$

↑初項 z, 公比 z の等比数列

ここで、z^{2024} は次のように計算する事ができる。　※ド・モアブルの定理

$$z^{2024}=z^{2022}\cdot z^2=(z^3)^{674}\cdot z^2=(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)^{674}\cdot(\cos 10\pi/3+i\sin 10\pi/3)$$

$$=(-1)^{674}\cdot(\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3)=\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3$$

上式を用いて引き続き和の計算を行うと以下のようになる。

$$\frac{z(z^{2024}-1)}{z-1}=\frac{(\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3)(\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3-1)}{\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3-1}$$

$$=\frac{(1/2-\sqrt{3}/2\,i)(-3/2-\sqrt{3}/2\,i)}{-1/2-\sqrt{3}/2\,i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-6+2\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}(-\sqrt{3}/2+1/2\,i)}{-2(1/2+\sqrt{3}/2\,i)}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 5\pi/6+i\sin 5\pi/6}{\cos\pi/3+i\sin\pi/3}$$

$$=-\sqrt{3}(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)=-\sqrt{3}i$$

以上から求める値は次のようになる。

$-\sqrt{3}i$ //

No.

Date

大問1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　藤崎瑞希

1.(8) コインを投げた回数と点Xの位置の変化を以下に示す。

2	4 ($\nearrow +2$)	6	8	10, 7	12, 9, 9, 6
			5	7, 4	9, 6, 6, 3
		3	5	7, 4	9, 6, 6, 3
			2	4, 1	6, 3, 3, 0
	1 ($\searrow -1$)	3	5	7, 4	9, 6, 6, 3
			2	4, 1	6, 3, 3, 0
		0	2	4, 1	6, 3, 3, 0
			−1	1, −2	3, 0, 0, −3
−1	1	3	5	7, 4	9, 6, 6, 3
			2	4, 1	6, 3, 3, 0
		0	2	4, 1	6, 3, 3, 0
			−1	1, −2	3, 0, 0, −3
	−2	0	2	4, 1	6, 3, 3, 0
			−1	1, −2	3, 0, 0, −3
		−3	−1	1, −2	3, 0, 0, −3
			−4	−2, −5	0, −3, −3, −6
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1/2	2/4	3/8	4/16	10/32	15/64
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

原点からの距離が1以下、すなわち $X=-1, 0, 1$ となる確率 ←

← サイコロの目

← サイコロの目の確率

上の表より題意の確率を計算すると次のようになる。

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{16}+\frac{1}{6}\cdot\frac{10}{32}+\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{64}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{32+32+24+16+20+15}{64}=\frac{1}{6}\cdot\frac{139}{64}=\frac{139}{384}$$

以上から求める確率は次のようになる。

$$\frac{139}{384} \quad //$$

大問2 藤柴理余

2. 数学的帰納法を用いて題意の命題を証明する。

(i) $n=1$ の場合における①式の左辺、右辺を計算すると以下のようになる。

$$(\text{左辺})=\int_\alpha^\beta x^1 e^{-x}dx=\int_\alpha^\beta x(-e^{-x})'dx=\left[-xe^{-x}\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta(-e^{-x})dx$$

$$=-\beta e^{-\beta}+\alpha e^{-\alpha}-\left[e^{-x}\right]_\alpha^\beta=\alpha e^{-\alpha}-\beta e^{-\beta}-e^{-\beta}+e^{-\alpha}$$

$$=e^{-\alpha}(1+\alpha)-e^{-\beta}(1+\beta)$$

$$(\text{右辺})=F_1(\alpha)-F_1(\beta)=e^{-\alpha}\sum_{r=0}^{1}{}_1P_{1-r}\alpha^r-e^{-\beta}\sum_{r=0}^{1}{}_1P_{1-r}\beta^r$$

$$=e^{-\alpha}({}_1P_1\alpha^0+{}_1P_0\alpha^1)-e^{-\beta}({}_1P_1\beta^0+{}_1P_0\beta^1)$$

$$=e^{-\alpha}(1+\alpha)-e^{-\beta}(1+\beta)\quad\cdots=(\text{左辺})$$

以上から $n=1$ の場合、命題は成立する事が分かる。

(ii) $n=k$ (k は1以上の整数) の場合、命題は成立すると仮定する。

$n=k+1$ の場合における①式の左辺、右辺を計算すると以下のようになる。

$$(\text{左辺})=\int_\alpha^\beta x^{k+1}e^{-x}dx=\int_\alpha^\beta x^{k+1}(-e^{-x})'dx=\left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta(k+1)x^k(-e^{-x})dx$$

$$=-\beta^{k+1}e^{-\beta}+\alpha^{k+1}e^{-\alpha}+(k+1)\int_\alpha^\beta x^k e^{-x}dx$$

$$=\alpha^{k+1}e^{-\alpha}-\beta^{k+1}e^{-\beta}+(k+1)\{F_k(\alpha)-F_k(\beta)\}$$

$$(\text{右辺})=F_{k+1}(\alpha)-F_{k+1}(\beta)=e^{-\alpha}\sum_{r=0}^{k+1}{}_{k+1}P_{k+1-r}\alpha^r-e^{-\beta}\sum_{r=0}^{k+1}{}_{k+1}P_{k+1-r}\beta^r$$

$$=e^{-\alpha}\left\{{}_{k+1}P_0\alpha^{k+1}+\sum_{r=0}^{k}{}_{k+1}P_{k+1-r}\alpha^r\right\}$$

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$-e^{-\beta}\left\{{}_{k+1}P_0\beta^{k+1}+\sum_{r=0}^{k}{}_{k+1}P_{k+1-r}\beta^r\right\}$$

$$=e^{-\alpha}\left\{\alpha^{k+1}+\sum_{r=0}^{k}\frac{(k+1)!}{r!}\alpha^r\right\}-e^{-\beta}\left\{\beta^{k+1}+\sum_{r=0}^{k}\frac{(k+1)!}{r!}\beta^r\right\}$$

$$=e^{-\alpha}\left\{\alpha^{k+1}+(k+1)\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!}\alpha^r\right\}-e^{-\beta}\left\{\beta^{k+1}+(k+1)\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!}\beta^r\right\}$$

$$=e^{-\alpha}\left\{\alpha^{k+1}+(k+1)\sum_{r=0}^{k}{}_kP_{k-r}\alpha^r\right\}-e^{-\beta}\left\{\beta^{k+1}+(k+1)\sum_{r=0}^{k}{}_kP_{k-r}\beta^r\right\}$$

$$=\alpha^{k+1}e^{-\alpha}+(k+1)F_k(\alpha)-\beta^{k+1}e^{-\beta}-(k+1)F_k(\beta)$$

$$=\alpha^{k+1}e^{-\alpha}-\beta^{k+1}e^{-\beta}+(k+1)\{F_k(\alpha)-F_k(\beta)\}\quad\cdots=(\text{左辺})$$

以上から $n=k+1$ の場合も命題は成立する事が分かる。

上記の(i),(ii)より、数学的帰納法を用いて命題が証明された。

大問3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　藤柴理系

3.(1) 変数yを$y=e^x$と定めると$x=\log y$となり、次式が成立する。

$$\frac{x}{e^x}=\frac{\log y}{y}$$

変数yの定義より$x\to+\infty$の場合、$y\to+\infty$となる。従って次式が成立する。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}$$

上式、左辺はゼロに収束するので、次式が導びかれる。

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}=0 \quad //$$

3.(2) 変数zを$z=1/x$と定めると次式が成立する。 ← $x\to+0$, $z\to+\infty$

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{z}\log\frac{1}{z}=\lim_{z\to+\infty}\frac{-\log z}{z}=-\lim_{z\to+\infty}\frac{\log z}{z}=0$$

※ $\log 1/z=\log z^{-1}=(-1)\log z$　　↑(1)の解より。

従って、次式が導びかれる。

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0 \quad //$$

3.(3) 始めに$x>0$の領域について考える。

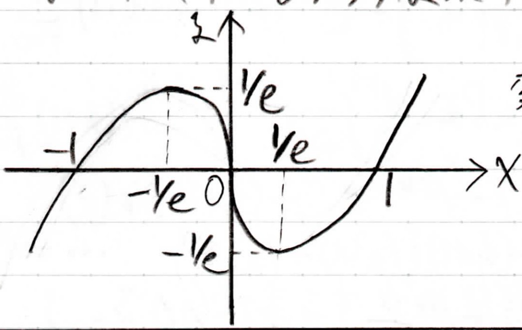
与式の一階微分、二階微分を求めると以下のようになる。

$$y'=(x\log|x|)'=(x\log x)'=\log x+x\cdot(1/x)=\log x+1$$
$$y''=(\log x+1)'=1/x$$
※ $x>0$

上式を用いて、増減表を書くと以下のようになる。

x	0	…	$1/e$	…
y'	/	$-$	0	$+$
y''	/	$+$	$+$	$+$
y	0	↘	$-1/e$	↗

$x<0$の領域については、$x>0$の領域におけるグラフを原点に関して点対称に移したものとなるので、求めるグラフは次のようになる。



変曲点はなし

//

大問4 藤柴理皇

4.(1) 点A, B, M, Nはそれぞれ以下のように与えられている。

$A:(\cos\theta, \sin\theta)\ (0<\theta<\pi)$、 $B:(\beta, 0)\ (1<\beta)$

$M:(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta)$、 $N:(t\beta, 0)\ (t<1)$

これより$\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$を求めると以下のようになる。

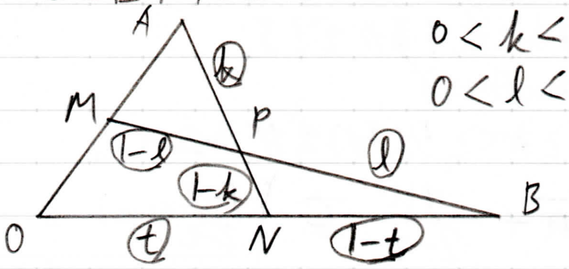
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

以上から求める解は次のようになる。

$$\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + t\vec{b}、\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \quad //$$

4.(2) 題意のベクトルを図示すると次のようになる。



$0<k<1$
$0<l<1$ } 模範解答の文字の設定を踏襲

上図より$\overrightarrow{OP}$は以下のように表す事ができる。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AN} = \vec{a} + k(-\vec{a} + t\vec{b}) = (1-k)\vec{a} + kt\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{BM} = \vec{b} + l(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}l\vec{a} + (1-l)\vec{b}$$

上式より次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} 1-k = \frac{1}{2}l \\ kt = 1-l \end{cases} \quad \cdots\ k = \frac{1}{2-t},\ l = \frac{2-2t}{2-t}$$

上記の連立方程式の解を用いると$\overrightarrow{OP}$は次のように表わされる。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1-t}{2-t}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b} \quad //$$

(別解) メネラウスの定理より次式が成立する。

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1-k}{k}\cdot\frac{1}{1} = 1 \quad \cdots\ k = \frac{1}{2-t}$$

これより$\overrightarrow{OP}$は次のように求める事ができる。

$$\overrightarrow{OP} = (1-k)\vec{a} + kt\vec{b} = \frac{1-t}{2-t}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b}$$

以上から求める解は次のようになる。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1-t}{2-t}\vec{a} + \frac{t}{2-t}\vec{b} \quad //$$

大問4　　藤埜理系

4.(3) 直線ABと直線OPが直交する時、次式が成立する。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\frac{1-t}{2-t}\vec{a}+\frac{t}{2-t}\vec{b}\right)=0$$

点Aの座標が$(\cos\theta,\sin\theta)$、点Bの座標が$(\beta,0)$なので$\vec{a}\cdot\vec{b}=\beta\cos\theta$、$|\vec{a}|^2=1$、$|\vec{b}|^2=\beta^2$となり、これらを用いて式変形を行うと以下のようになる。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1-t}{2-t}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1-t}{2-t}|\vec{a}|^2+\frac{t}{2-t}|\vec{b}|^2-\frac{t}{2-t}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=\beta\cos\theta\cdot\frac{1-2t}{2-t}+\frac{(\beta^2+1)t-1}{2-t}=0 \quad \leftarrow t<1\text{より}\ 2-t\neq0$$

$$(\beta^2-2\beta\cos\theta+1)t+\beta\cos\theta-1=0$$

上式よりtはβ,θを用いて次のように表す事ができる。

$$t=(1-\beta\cos\theta)/(\beta^2-2\beta\cos\theta+1)$$

次に$\overrightarrow{OQ}$を求める。定数をs,uとおくと以下の式が成立する。

$$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OP}=\frac{1-t}{2-t}u\vec{a}+\frac{tu}{2-t}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

$$\frac{1-t}{2-t}u=1-s,\quad \frac{tu}{2-t}=s$$

$$\downarrow$$

$$u=2-t,\quad s=t$$

上式より$\overrightarrow{OQ}$は次のように表わされる。

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

ここでtが$0\leqq t\leqq1$であれば点Qは線分ABの内分点となるので、
点Qが外分点となるためには$t<0$または$t>1$である必要がある。
tの条件$(t<1)$より$t>1$は不適となる事から、次の不等式が導びかれる。

$$t=\frac{1-\beta\cos\theta}{\beta^2-2\beta\cos\theta+1}<0$$

分母について、先に$(\beta-\cos\theta)^2$を計算すると$(\beta^2-2\beta\cos\theta+\cos^2\theta)$となるので、
分母は$\{(\beta-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}$と変形する事ができる。これより分母は正の値となるので、上の不等式が満たされるには次の不等式が成立していなければならない。

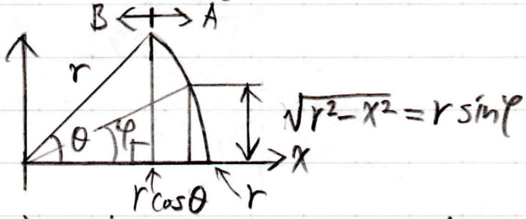
$$1-\beta\cos\theta<0 \quad \cdots \quad 1<\beta\cos\theta$$

以上から求める解は次のようになる。

$$t=\frac{1-\beta\cos\theta}{\beta^2-2\beta\cos\theta+1},\quad 1<\beta\cos\theta \quad //$$

大問5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　藤柴理系

5.(1) 扇形を2つに分割して考える。



領域Aの部分をx軸周りに回転させて作られる回転体の体積を求める式を立てると次のようになる。

$$V_A=\int_{x=r\cos\theta}^{x=r}\pi\left\{\sqrt{r^2-x^2}\right\}^2dx$$

ここで $x=r\cos\varphi$ を用いて置換積分を適用すると dx と積分範囲は以下のようになる。

$$dx=-r\sin\varphi\, d\varphi$$

x	$r\cos\theta\to r$
φ	$\theta\to 0$

これより体積 V_A の式を書き換えると次のようになる。

$$V_A=\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=0}\pi\left\{r\sin\varphi\right\}^2(-r\sin\varphi\, d\varphi)=-\pi r^3\int_{\theta}^{0}\sin^3\varphi\, d\varphi$$

上式を変形すると以下のようになる。

$$V_A=-\pi r^3\int_{\theta}^{0}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)d\varphi=-\pi r^3\int_{\theta}^{0}\sin\varphi\, d\varphi+\pi r^3\int_{\theta}^{0}\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$=-\pi r^3\Big[-\cos\varphi\Big]_{\theta}^{0}+\pi r^3\Big[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_{\theta}^{0}=\pi r^3(1-\cos\theta)-\frac{1}{3}\pi r^3(1-\cos^3\theta)$$

$$=\pi r^3(1/3\cos^3\theta-\cos\theta+2/3)$$

また領域Bの部分が作る回転体の体積は円錐の体積となるので次のように表わされる。

$$V_B=\frac{1}{3}\pi(r\sin\theta)^2\cdot r\cos\theta=\frac{1}{3}\pi r^3\sin^2\theta\cos\theta=\frac{1}{3}\pi r^3(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

これより求める体積の計算を行うと以下のようになる。

$$V_A+V_B=\pi r^3\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\pi r^3(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

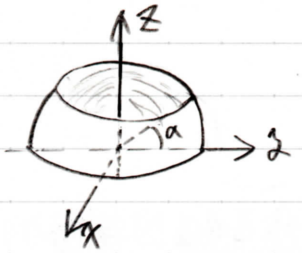
$$=\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$$

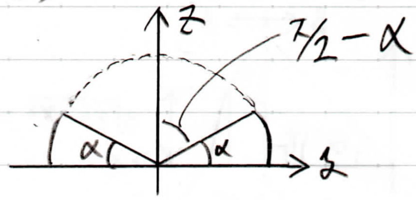
以上から求める解は次のようになる。

$$V_1=\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$$ //

大問5 藤紫瑶希

5.(2) 題意の立体を図示すると以下のようになる。





この立体は半球から前問で求めた立体をくり抜いた形となる。
従って前問の解を用いて、体積を計算すると以下のようになる。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}=\frac{2}{3}\pi r^3\left\{1-1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\alpha$$

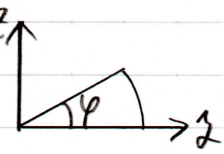
以上から求める解は次のようになる。

$$\underline{V_2=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\alpha}\ //$$

(補足) 工夫せずに計算すると以下のようになる。

$dz=r\cos\varphi\, d\varphi$

z	$0\to r\sin\alpha$
φ	$0\to\alpha$



$$\int_{z=0}^{z=r\sin\alpha}\pi\left\{\sqrt{r^2-z^2}\right\}^2dz-\frac{1}{3}\pi(r\cos\alpha)^2\cdot r\sin\alpha$$

$$=\int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha}\pi\{r\cos\varphi\}^2(r\cos\varphi\,d\varphi)-\frac{1}{3}\pi r^3\cos^2\alpha\sin\alpha$$

$$=\pi r^3\int_0^\alpha\cos^3\varphi\,d\varphi-\frac{1}{3}\pi r^3(\sin\alpha-\sin^3\alpha)$$

$$=\pi r^3\int_0^\alpha(\cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{3}\pi r^3(\sin\alpha-\sin^3\alpha)$$

$$=\pi r^3\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^\alpha-\frac{1}{3}\pi r^3(\sin\alpha-\sin^3\alpha)$$

$$=\pi r^3\left\{\sin\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha-\frac{1}{3}\sin\alpha+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\alpha$$