必須問題　　　　　　　　　　　　　　　　　　藤柴理季

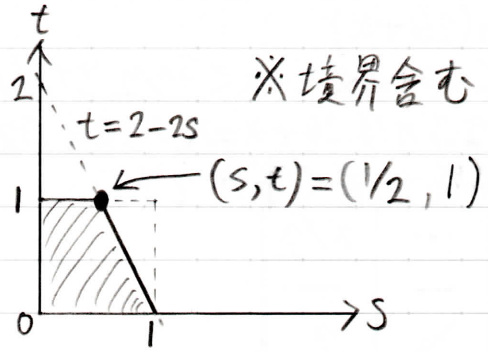
I.(1) 与えられている不等式を変形すると以下のようになる。

$0 \leqq s + t/2 \leqq 1 \cdots -s \leqq t/2 \leqq 1-s \cdots -2s \leqq t \leqq 2-2s$

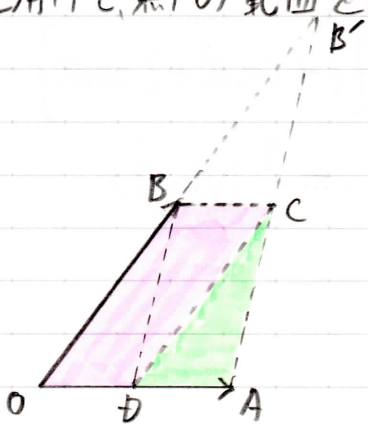
$\cdots -2s \leqq 0 \leqq t \leqq 2-2s \quad \because 0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$

$\cdots 0 \leqq t \leqq 2-2s$　ただし、$0 \leqq t \leqq 1$

実数 s, t の範囲を図示すると次のようになる。



これを用いて、点Pの範囲を図示すると以下のようになる。



(i) $0 \leqq s \leqq 1/2$ の範囲においては $0 \leqq t \leqq 1$ なので、点Pは平行四辺形ODCB内に存在する。

(ii) $1/2 < s \leqq 1$ の範囲においては $0 \leqq t \leqq 2-2s$ なので、以下の式が成立する。

$\overrightarrow{OP_t} = s\overrightarrow{OA} + t_t\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OA} + (2-2s)\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{DP_t} = \overrightarrow{OP_t} - \overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + (2-2s)\overrightarrow{OB} - 1/2\,\overrightarrow{OA}$

$= (2s-1)\cdot 1/2\,\overrightarrow{OA} + (2-2s)\overrightarrow{OB}$

$= (2s-1)\overrightarrow{DA} + (2-2s)\overrightarrow{DC}$

点 P_t は t の値が最大となるような点

ここで $(2s-1)+(2-2s)=1$ となるので、点 P_t は辺AC上に存在する。ただし $1/2 < s$ なので点Cは含まない。

(i), (ii)より点Pが存在する範囲は四角形OACBの内側(境界含む)となる。//

I.(2) 前問で求めた図形の面積を求める式を立てると次のようになる。

$3 \times \triangle ODB = 3 \times 1/2 \times 1/2(\sin\theta + 2\cos\theta) \times 4\sin\theta$

$= 3(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)$

$= 3\{(1-\cos 2\theta)/2 + \sin 2\theta\}$　　※半角公式、倍角公式

$= 3/2\,(1 - \cos 2\theta + 2\sin 2\theta)$

以上から面積を表す式は次のようになる。

$\underline{\frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta + 2\sin 2\theta)}$ //

No.
Date

必須問題　　　　　　　　　　　　　　　　　　藤柴理季

1.(3) 前問で求めた面積の式を微分すると次のようになる。

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{3}{2}\left(1-\cos 2\theta+2\sin 2\theta\right)\right\}=\frac{3}{2}\left(2\sin 2\theta+4\cos 2\theta\right)$$

$$=3(\sin 2\theta+2\cos 2\theta)=3\sqrt{5}\left(1/\sqrt{5}\sin 2\theta+2/\sqrt{5}\cos 2\theta\right)$$

ここで $\cos\alpha=1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha=2/\sqrt{5}$ となるような角度を α [rad] とおく。

$$3\sqrt{5}\left(1/\sqrt{5}\sin 2\theta+2/\sqrt{5}\cos 2\theta\right)=3\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)$$

角度 θ の範囲は $0<\theta<\pi/2$ なので、$0<2\theta+\alpha<\pi+\alpha<3\pi/2$ となり
この範囲において $\sin(2\theta+\alpha)$ がゼロとなるのは $2\theta+\alpha=\pi$ の場合のみである。
この事から面積について次のような増減表を書く事ができる。

θ	0	$\cdots$	$(\pi-\alpha)/2$	$\cdots$	$\pi/2$
導関数	$+$	$+$	0	$-$	$-$
面積	0	↗	最大	↘	2

これより面積の最大値を求めると次のようになる。

$$\frac{3}{2}\left\{1-\cos(\pi-\alpha)+2\sin(\pi-\alpha)\right\}=\frac{3}{2}\left\{1+\cos\alpha+2\sin\alpha\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)$$

以上から面積の最大値は次のようになる。

$$\underline{\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)}\ //$$

必須問題

藤柴瑠希

Ⅱ.(1) 与えられた式と条件から以下の内容が導びかれる。

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=0 \cdots g(-1)=a-b+c=0 \\ f(1)=2 \cdots g(1)=a+b+c=2 \end{array}\right\} \cdots \left\{\begin{array}{l} a+c=1 \\ b=1 \end{array}\right.$$

$f(k)-g(k)=0$

$$\begin{aligned} \cdots & k^2(k+1)-(ak^2+bk+c) \\ &= k^3+k^2-ak^2-bk-c = k^3+(1-a)k^2-k-c \\ &= k^3+ck^2-k-c = k^3+c(k^2-1)-k \cdots =0 \end{aligned}$$

$\cdots k^3+c(k^2-1)-k=0$

$\cdots c(k^2-1)=-k(k^2-1)$

$\cdots c=-k \quad \because k\neq 1,-1$

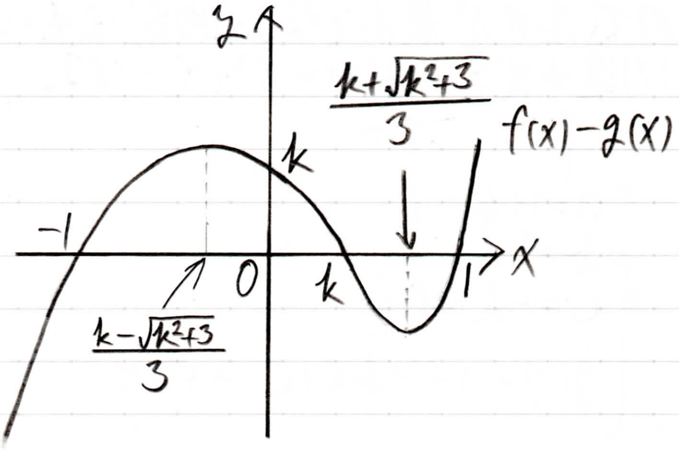
$\cdots a=1-c=1+k$

以上から $f(x)-g(x)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2(x+1)-\{(k+1)x^2+x-k\} \\ &= x^2(x+1)-\{kx^2+x^2+x-k\} \\ &= x^2(x+1)-\{k(x^2-1)+x(x+1)\} \\ &= (x+1)[x^2-k(x-1)-x] \\ &= (x+1)(x-1)[x-k] \end{aligned}$$

$\underline{f(x)-g(x)=(x-k)(x+1)(x-1)}$ //

Ⅱ.(2) 前問で求めた式の概形を以下に示す。



$$\begin{aligned} \{f(x)-g(x)\}' &= (x+1)(x-1)+(x-k)(x-1)+(x-k)(x+1) = x^2-1+2x(x-k) \\ &= 3x^2-2kx-1 \end{aligned}$$

$x_0=(2k\pm\sqrt{4k^2+12})/6=(k\pm\sqrt{k^2+3})/3$

No.
Date

必須問題 藤学理系

II.(3) 与式を計算すると以下のようになる。

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_{k}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{1}^{k}\{f(x)-g(x)\}dx$$

ここで $\{f(x)-g(x)\}$ の不定積分(積分定数省略)を $H(x)$ とおくと、これは次のようになる。

$$H(x)=\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int(x^3-kx^2-x+k)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+kx$$

これを用いて元の式を変形すると以下のようになる。

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=H(k)-H(-1)+H(k)-H(1)$$
$$=2H(k)-\{H(-1)+H(1)\}$$
$$=2\left(\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{3}k^4-\frac{1}{2}k^2+k^2\right)-\left(2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=-1/6\,k^4+k^2+1/2$$

偶関数、奇関数の性質

上式を k の関数と考える。導関数と増減表を書くと以下のようになる。

$$-2/3\,k^3+2k=k(-2/3\,k^2+2)$$

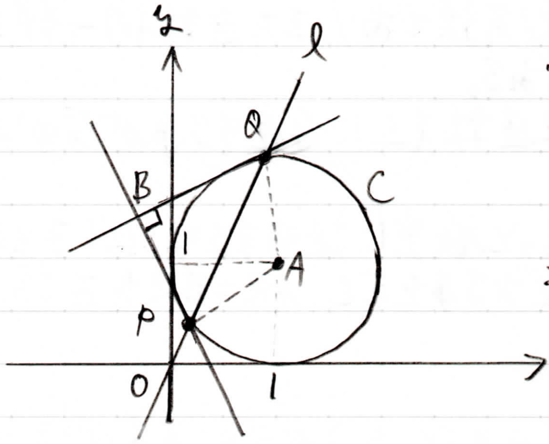
k	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
導関数	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
関数	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	2	$\searrow$

k の範囲は $-1<k<1$ であるので、与式が最小となる k の値は $k=0$ となる。
また、この時の関数 $g(x)$ は(1)の途中式より $g(x)=x^2+x$ となる。 //

$$\begin{cases} a=1+k=1 \\ b=1 \\ c=-k=0 \\ g(x)=ax^2+bx+c=x^2+x \end{cases}$$

選択問題(I II A B)　　藤笙理系

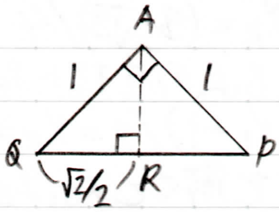
I.(1) 題意の図形を描くと以下のようになる。



※ $y=x$ を軸として、線対称の位置にも直線 l、点Bを置く事ができる。

※本来の正しい図形とは異なり歪なものとなっている点に注意。

幾何学的に点Aと直線 l の距離を求める。
直線BP、BQは円Cの接線であるから $\angle BPA=\angle BQA=90^\circ$ となる。
$\angle PBQ=90^\circ$ であるから $\angle PAQ=90^\circ$ となる。 ※四角形の内角の和は360°なので、
$PA=QA=1$ となるので、四角形APBQは一辺の長さが1の正方形となる。
求める距離は右図中のARの長さであるから、
三平方の定理より次式が成立する。



$$AR=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上から、円Cの中心点Aと直線 l の距離は次のようになる。

$1/\sqrt{2}$ //

I.(2) 正の実数を a とおくと直線 l の方程式は $-ax+y=0$ と表す事ができる。
ここで点と直線との距離の公式を用いると次式が成立する。

$$\frac{|-a\cdot 1+1|}{\sqrt{(-a)^2+1^2}}=\frac{|-a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

上式の両辺を二乗して整理すると次の二次方程式が得られる。

$$a^2-4a+1=0$$

これを解くと $a=2\pm\sqrt{3}$ となり、2つとも正の値となって始めの前提 $(a>0)$ を満たしている。従って、直線 l の傾きは次のようになる。

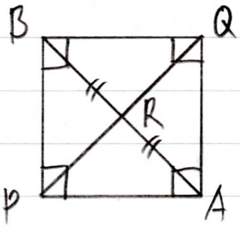
$2\pm\sqrt{3}$ //

$$a=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$$0<3<4 \to 0<\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$$
$$\to 0<2-\sqrt{3}$$

選択問題(IⅡAB)　　　　　　　　　　　　藤紫理系

I.(3) 前問(1)の途中で四角形APBQは正方形である事を示した。
線分ABは正方形APBQの対角線であり、また直線lの一部である線分PQも正方形APBQの対角線である。
この事から線分ABの中点は直線l上に存在する事が分かる。 //



もし、もっと厳密に証明するならば、正方形の中の三角形が合同である事を示し、AR=BRを主張する。

I.(4) 点Rは線分ABの中点であるから、点R(x_R, y_R)が求められれば点B(x_B, y_B)も求める事ができる。点Rに関しては以下の方程式が成立する。

$y_R=(2+\sqrt{3})x_R$　直線lの方程式で傾き$2+\sqrt{3}$の方を採用。

$(1-y_R)/(1-x_R)=-1/(2+\sqrt{3})$　直線の直交条件より。

上式を解くとx_R、y_Rはそれぞれ次のようになる。

$x_R=(3-\sqrt{3})/4$、　$y_R=(3+\sqrt{3})/4$

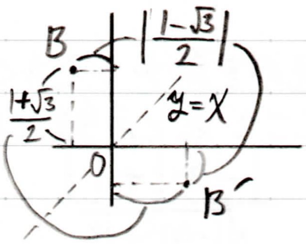
点A、B、Rの座標に関しては以下の方程式が成立する。

$(x_B+1)/2=x_R=(3-\sqrt{3})/4$、　$(y_B+1)/2=y_R=(3+\sqrt{3})/4$

上式を解くとx_B、y_Bはそれぞれ次のようになる。

$x_B=(1-\sqrt{3})/2$、　$y_B=(1+\sqrt{3})/2$

また、$y=x$を線対称軸として、(x_B, y_B)を折り返した先の点も求める点Bの1つとなる。もう1つの点B'の座標は上式を用いて次のようになる。



$x_{B'}=y_B=(1+\sqrt{3})/2$、$y_{B'}=x_B=(1-\sqrt{3})/2$

以上から点Bの座標は次のようになる。

$$\left(\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)$$ 複号同順 //

No.

Date

選択問題(IIAB)　藤華理季

II.(1) 数列 a_{n+1}, b_{n+1} の式を整理すると以下のようになる。

$$a_{n+1} = r_{n+1}\cos\theta_{n+1} = r_n \sin\theta_n = b_n$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= r_{n+1}\sin\theta_{n+1} = \sqrt{2}\, r_n \cos(\theta_n - \pi/4) \\ &= \sqrt{2}\, r_n (\cos\theta_n \cos \pi/4 + \sin\theta_n \sin \pi/4) \\ &= \sqrt{2}\, r_n (1/\sqrt{2}\cos\theta_n + 1/\sqrt{2}\sin\theta_n) = r_n\cos\theta_n + r_n \sin\theta_n \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

以上から数列 a_{n+1}, b_{n+1} は次のように表される。

$$\underline{a_{n+1} = b_n \quad , \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad //}$$

II.(2) 数列 c_n, c_{n+1} の式を変形すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} c_n &= a_{n+1} - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_n \\ &= b_n - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_n \qquad \because (1)\text{より } a_{n+1} = b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+1} - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_{n+1} \\ &= a_n + b_n - (1+\sqrt{5})/2 \cdot b_n \qquad \because (1)\text{より } b_{n+1} = a_n + b_n,\ a_{n+1} = b_n \\ &= (1-\sqrt{5})/2 \cdot b_n + a_n = (1-\sqrt{5})/2 \cdot \{b_n + 2/(1-\sqrt{5}) \cdot a_n\} \\ &= (1-\sqrt{5})/2 \cdot \{b_n - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_n\} \\ &= (1-\sqrt{5})/2 \cdot c_n \end{aligned}$$

上式より数列 c_n は公比 $(1-\sqrt{5})/2$ の等比数列である事が分かる。

初項 c_1 は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_1 = r_1 \sin\theta_1 - (1+\sqrt{5})/2 \cdot r_1 \cos\theta_1 \\ &= \sqrt{2}\sin \pi/4 - (1+\sqrt{5})/2 \cdot \sqrt{2}\cos \pi/4 = 1 - (1+\sqrt{5})/2 = (1-\sqrt{5})/2 \end{aligned}$$

以上から数列 c_n の一般項は次のようになる。

$$c_n = \{(1-\sqrt{5})/2\}^n$$

同様に数列 d_n, d_{n+1} の式を変形すると以下のようになる。

$$d_n = b_n - (1-\sqrt{5})/2 \cdot a_n \ , \quad d_{n+1} = (1+\sqrt{5})/2 \cdot d_n$$

また初項 d_1 は次のようになる。

$$d_1 = b_1 - (1-\sqrt{5})/2 \cdot a_1 = 1 - (1-\sqrt{5})/2 = (1+\sqrt{5})/2$$

これより数列 d_n の一般項は次のようになる。

$$d_n = \{(1+\sqrt{5})/2\}^n$$

以上、求める数列の一般項をまとめると次のようになる。

$$\underline{c_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ , \quad d_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad //}$$

選択問題(IIAB)　　藤学指系

II.(3)前問で一般項をもとめた数列c_n, d_nを用いて数列a_nを表す事を考える。

$$c_n - d_n = \{b_n - (1+\sqrt{5})/2 \cdot a_n\} - \{b_n - (1-\sqrt{5})/2 \cdot a_n\}$$
$$= a_n\{(1-\sqrt{5})/2 - (1+\sqrt{5})/2\} = -\sqrt{5}\, a_n$$

上式より数列a_nの一般項は次のようになる。

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad //$$

また、(1)の解より$b_n = a_{n+1}$であるから数列b_nの一般項は次のようになる。

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}. \quad //$$

II.(4)与えられているa_{2n+1}を式で表すと次のようになる。

$$a_{2n+1} = 1/\sqrt{5}\left[\{(1+\sqrt{5})/2\}^{2n+1} - \{(1-\sqrt{5})/2\}^{2n+1}\right]$$

数列a_n, b_nは$a_n = r_n\cos\theta_n$, $b_n = r_n\sin\theta_n$と定められているのでr_n^2は以下のように計算する事ができる。

$$r_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right\}.$$
$$+\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}\right\}.$$
$$= \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(1+\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) - 2(-1)^n - 2(-1)^{n+1}\right\}.$$
$$= \frac{1}{5}\left\{\sqrt{5}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \sqrt{5}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right\}.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\}.$$
$$= a_{2n+1}$$

以上からr_nはa_{2n+1}を用いて次のように表す事ができる。

$$r_n = \sqrt{a_{2n+1}} \quad //$$

選択問題(III)　　　　　　　　　　　　　　藤堂瑠希

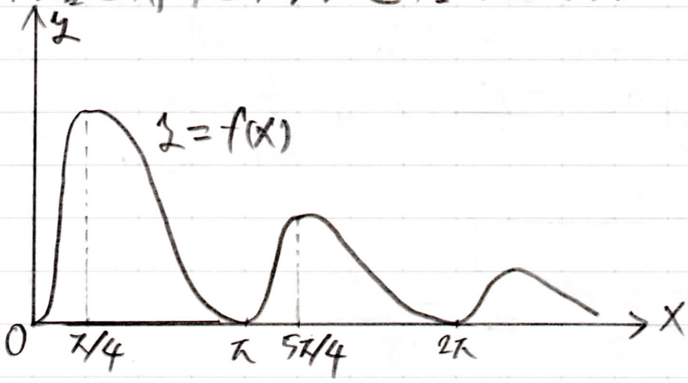
I.(1) グラフの概形を調べるため、関数 $f(x)$ の導関数を求め、これを用いて増減表を書くと以下のようになる。

$$f'(x)=(e^{-2x}\sin^2 x)'=-2e^{-2x}\sin^2 x+e^{-2x}\cdot 2\sin x\cos x$$
$$=2e^{-2x}\sin x(-\sin x+\cos x)=2e^{-2x}\sin x\cdot\sqrt{2}\sin(x+3\pi/4)$$
$$=2\sqrt{2}\,e^{-2x}\sin x\cdot\sin(x+3\pi/4)$$

$x=n\pi,\ n\pi+\pi/4\ (n=0,1,2\cdots)$ の時にゼロとなる。

x	0	$\cdots$	$\pi/4$	$\cdots$	π	$\cdots$	$5\pi/4$	$\cdots$	2π	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$f(x)$	0	↗	$e^{-\pi/2}/2$	↘	0	↗	$e^{-5\pi/2}/2$	↘	0	$\cdots$

以上の内容を用いてグラフを描くと次のようになる。



I.(2) 定積分 S_n の計算を行うと以下のようになる。

$$S_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}dx-\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}e^{-2n\pi}(1-e^{-2\pi})-\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx$$

ここで $e^{-2x}\cos 2x$ の定積分を I とおいて、計算を行う。

$$I=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-2\sin 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{-2n\pi}(1-e^{-2\pi})-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{-2n\pi}(1-e^{-2\pi})-\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(2\cos 2x)dx$$
$$=1/2\cdot e^{-2n\pi}(1-e^{-2\pi})-I$$

上式より定積分 I は次のように表される。

$$I=1/4\cdot e^{-2n\pi}(1-e^{-2\pi})$$

No.
Date

選択問題(Ⅲ)　藤upu理系

I.(2続) 定積分Iを用いて、引き続き定積分S_nの計算を行う。

$$S_n=\frac{1}{4}e^{-2nx}(1-e^{-2x})-\frac{1}{2}I=\frac{1}{4}e^{-2nx}(1-e^{-2x})-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^{-2nx}(1-e^{-2x})$$
$$=1/8\cdot e^{-2nx}(1-e^{-2x})$$

以上から求める定積分S_nの値は次のようになる。

$$\underline{S_n=1/8\cdot e^{-2nx}(1-e^{-2x})}\ //$$

I.(3) 与式の計算を行うと以下のようになる。

$$\sum_{n=0}^{N}S_n=\sum_{n=0}^{N}\left\{\frac{1}{8}e^{-2nx}(1-e^{-2x})\right\}=\frac{1-e^{-2x}}{8}\sum_{n=0}^{N}e^{-2nx}$$

ここで$r=e^{-2x}$とおくと上式は次のように書き換えられる。

$$\sum_{n=0}^{N}S_n=\frac{1-r}{8}\sum_{n=0}^{N}r^n=\frac{1-r}{8}\left\{r^0+\sum_{n=1}^{N}r\cdot r^{n-1}\right\}$$ 等比数列の和

$$=\frac{1-r}{8}\left\{1+\frac{r(1-r^N)}{1-r}\right\}$$
$$=\frac{1-r}{8}+\frac{r(1-r^N)}{8}=\frac{1-r^{N+1}}{8}$$

$r=e^{-2x}<1$であるから求める極限の値は次のようになる。

$$\underline{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}S_n=\frac{1}{8}}\ //$$

選択問題(Ⅱ)　　藤学琉条

Ⅱ.(1) 関数$f(x)$には次のような性質がある。

$$f(x+y)=2f(x)f(y)$$

ここでx, yを$x=x, y=0$、また$x=x, y=-x$とおくと以下の式が得られる。

$$f(x+0)=2f(x)f(0)\cdots f(x)=2f(x)f(0)\cdots 1=2f(0)\cdots f(0)=1/2$$

$$f(x-x)=2f(x)f(-x)\cdots f(0)=2f(x)f(-x)\cdots 1/2=2f(x)f(-x)$$

※$f(x)>0$

上式より$f(-x)$について式を整理すると次式が導びかれる。

$$f(-x)=\frac{1}{4f(x)}$$

Ⅱ.(2) 微分の定義に従って関数$g(x)$の微分を行うと以下のようになる。

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log f(x+h)-\log f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log\{2f(x)f(h)\}-\log f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log 2+\log f(x)+\log f(h)-\log f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log 2+\log f(h)}{h}$$

上式より$g'(x)$を求めると変数xを含まない式が得られる。
ここで問題文より$g'(0)=2$が与えられている事から次式が成立する。

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\log 2+\log f(h)}{h}=2$$

以上から関数$g(x)$の導関数$g'(x)$は、変数xによらない定数値となり次のように表される。

$$g'(x)=2$$

No.

Date

選択問題(Ⅲ)　藤堂瑞希

Ⅱ.(3) 関数$g(x)$を$g(x)=ax+b$とおくと$g'(x)=a$となるので、前問の解を用いると
$a=2$となる。
また$g(0)$を計算すると以下のようになる。

$$g(0)=2\cdot 0+b=b=\log f(0)=\log\frac{1}{2}=-\log 2 \qquad \because f(0)=\frac{1}{2}$$

上式より$b=-\log 2$となる。
以上から関数$g(x)$は$g(x)=2x-\log 2$となる。
次に関数$g(x)$を用いて関数$f(x)$を求めると以下のようになる。

$$f(x)=e^{g(x)} \qquad \because g(x)=\log f(x)$$
$$=e^{2x-\log 2}=e^{2x}\cdot e^{-\log 2}=e^{2x}\cdot 2^{-1}=e^{2x}/2$$

以上から求める解をまとめると次のようになる。

$a=2$、$b=-\log 2$、$f(x)=e^{2x}/2$ //