No. 藤[illegible]
Date

1.(1) 与式の導関数を求める。

$$\frac{d}{dx}\{\log(1+x^4)\}=(4x^3)\cdot\frac{1}{1+x^4}$$

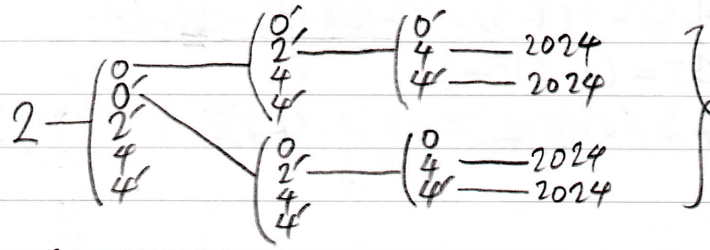
従って求める式は次のようになる。

$$y'=\frac{4x^3}{1+x^4}$$

1.(2) 6枚全てのカードを区別する場合、その中から4枚を取り出し並べて4桁の数となるのは千の位が「2」「2'」「4」「4'」のどれかになる場合である。
これより、4桁の数の総数は次のようになる。

$$\frac{4}{6}\times{}_6P_4=240$$ ※ 2/6 は千の位が「0」または「0'」

また樹形図を考えると以下のようになる。



}4パターン

2' — 上記の「2'」を「2」に置き代えたもの } 4パターン
4 — なし
4' — なし

以上から求める確率は次のようになる。

$$\frac{8}{240}=\frac{1}{30}$$

1.(3) ベクトルの内積を計算する。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(p^2,1,1)\cdot(3,p-3,1)=3p^2+(p-3)+1=3p^2+p-2$$
$$=(3p-2)(p+1)$$

ベクトルが互いに垂直であれば内積の値はゼロとなるので、次式が成立する。

$$(3p-2)(p+1)=0 \quad \cdots \quad p=-1,\ 2/3$$

従って求める解は次のようになる。

$$p=-1,\ \frac{2}{3}$$

1.(4) 部分積分を用いて計算を行う。

$$\int_2^e \log x\,dx = \int_2^e (x)' \log x\,dx = \left[x\log x\right]_2^e - \int_2^e x(\log x)'dx$$

$$= (e\log e - 2\log 2) - \int_2^e x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= e - 2\log 2 - \int_2^e dx = e - 2\log 2 - \left[x\right]_2^e$$

$$= e - 2\log 2 - \{e - 2\} = 2 - 2\log 2$$

従って、求める値は次のようになる。

$\underline{2 - 2\log 2}$ //

1.(5) 計算を以下に示す。

$$x = t + 5 \cdots t = x - 5$$

$$z = t^2 - 2t = (x-5)^2 - 2(x-5) = x^2 - 10x + 25 - 2x + 10$$

$$= x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2 - 1$$

以上から $z$ が最小となる $x$ の値は次のようになる。

$\underline{x = 6}$ //

1.(6) 計算を以下に示す。

$$\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-2n} = \frac{(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2-2n})}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2-2n}}$$

$$= \frac{(n^2+5n) - (n^2-2n)}{n\sqrt{1+5/n} + n\sqrt{1-2/n}} = \frac{7n}{n\sqrt{1+5/n} + n\sqrt{1-2/n}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{1+5/n} + \sqrt{1-2/n}}$$

上記計算結果を用いて極限を求めると次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{1+5/n} + \sqrt{1-2/n}} = \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2}$$

以上から求める値は次のようになる。

$\underline{\dfrac{7}{2}}$ //

1.(7) $2^{2024}$ を変形すると次のようになる。

$$2^{2024}=2^3\cdot 2^{2021}=8\cdot 2^{2021}=(7+1)2^{2021}=7\cdot 2^{2021}+2^{2021}$$

上式中の $7\cdot 2^{2021}$ は7の倍数なので $2^{2024}$ を7で割った余りは $2^{2021}$ を7で割った余りに等しい。
次に $2^{2021}$ に同様の操作を繰り返していくと最終的に $2^{2024}$ を7で割った余りは $2^5$ を7で割った余りに等しい。

$$2^5\div 7=32\div 7=4\ldots 4$$

従って余りは次のようになる。

$$\underline{4}\ /\!/$$

1.(8) 複素数 $z$ を $z=x+iy,\ (x,y\in\mathbb{R})$ とおく。与えられた条件より次の式が成立する。

$$x^2+y^2=1\ ,\ (x-1)^2+y^2=1$$

上式を整理する。

$$(x^2+y^2)-\{(x-1)^2+y^2\}=x^2-(x^2-2x+1)=2x-1\quad\cdots\quad=1-1=0$$

これより $2x-1=0$ が得られ、$x=1/2$ である事が分かる。
次に $y$ を求めると次のようになる。

$$y^2=1-(1/2)^2=3/4\ \cdots\ y=\pm\sqrt{3}/2$$

以上から求める複素数 $z$ は次のようになる。

$$\underline{z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ /\!/$$

No. 藤生雅之

Date

1.(9) 円の半径を$r$とおいて、点と直線との距離の公式を用いると次式が成立する。

$$r=\frac{|1\cdot0-1\cdot2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

従って、円の方程式は次のようになる。

$$\underline{x^2+(y-2)^2=2} \quad //$$

1.(10) 考える命題は次のようになる。

「$\underbrace{\text{nが奇数}}_{p}$ならば、$\underbrace{n^2+2n+1\text{は偶数}}_{q}$」

(i) $n=2k-1$ $(k\in\mathbb{Z})$とおく。

$$n^2+2n+1=(2k-1)^2+2(2k-1)+1=4k^2-4k+1+4k-2+1$$
$$=4k^2$$

4は偶数なので、$p\Rightarrow q$は真、すなわち十分条件。

(ii) $n^2+2n+1$が偶数であるとする。

$n^2+2n+1$は偶数 $\Rightarrow$ $n^2+2n$は奇数

$\Rightarrow$ $n(n+2)$は奇数

$n$と$n+2$の偶奇は一致しており、$n$が偶数であれば、$n(n+2)$は偶数であり、$n^2+2n+1$は奇数となる。これより$n$は奇数となる。

従って、$q\Rightarrow p$は真、すなわち必要条件。

以上から選択肢は次のようになる。

<u>(a) 必要十分条件である。</u> //

No. 藤堂理希
Date

2.(1) 与式$f(x)$の導関数$f'(x)$を求めると以下のようになる。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-1}=(-1)(2x)(x^2+1)^{-2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

従って求める解は次のようになる。

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ //

2.(2) 接線の公式と(1)の解を用いると次式が得られる。

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

この式を整理すると以下のようになる。

$$y=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{2t^2+(t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

従って、接線$l$の方程式は次のようになる。

$$y=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}x+\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$ //

2.(3) 接線$l$と$x$軸との交点$(u,0)$では次式が成立する。

$$0=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}u+\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

上式を変形すると$u$について次式が得られる。

$$u=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2t}$$ //

2.(4) 前問で求めた$u$の式に対して相加相乗平均の不等式を適用すると次式が得られる。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2t}\right)\geqq\sqrt{\frac{3t}{2}\cdot\frac{1}{2t}}\ \cdots\ \frac{1}{2}u\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots\ u\geqq\sqrt{3}$$

これより$u$の最小値は$\sqrt{3}$となり、$u=\sqrt{3}$とおいて$t$を求めると以下のようになる。

$$\sqrt{3}=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2t}\ \cdots\ 3t^2-2\sqrt{3}t+1=0\ \cdots\ (\sqrt{3}t-1)^2=0\ \cdots\ t=1/\sqrt{3}$$

以上から$u$の最小値は$\sqrt{3}$、その時の$t$の値は$1/\sqrt{3}$となる。 //

※ $\frac{du}{dt}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2t^2}=0\ \cdots\ t^2=\frac{1}{3}\ \cdots\ t=\frac{1}{\sqrt{3}}\ (\because t>0)\ \cdots\ u(t=\frac{1}{\sqrt{3}})=\sqrt{3}$.

No. 藤堂理桑

Date

2.(5) 求める面積は次式の計算により求められる。

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$$

$x=\tan\theta$ と置換すると、$dx$ と積分範囲は次のようになる。

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

| $x$ | $1/\sqrt{3} \to \sqrt{3}$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\pi/6 \to \pi/3$ |

従って、面積は次のように計算される。

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{1/\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}d\theta=\left[\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

以上から求める面積は $\pi/6$ となる。 //

3.(1) 関数f(x)を変形すると次のようになる。

$$f(x)=2\sin^2 x-3\sin x+1=(\sin x-1)(2\sin x-1)$$

f(x)=0となるxを求めるには以下の方程式を解く必要がある。

$$\begin{cases}\sin x-1=0 \cdots \sin x=1 \cdots x=\pi/2\\ 2\sin x-1=0 \cdots \sin x=1/2 \cdots x=\pi/6,\ 5\pi/6\end{cases}$$

以上からf(x)=0を満たすxは次のようになる。

$\pi/6,\ \pi/2,\ 5\pi/6$ //

3.(2) 前問の式変形を用いる。$(\sin x-1)\leqq 0$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$なので、$f(x)\leqq 0$となるためには$(2\sin x-1)\geqq 0$とならなければならない。この不等式を解くと次のようになる。

$$2\sin x-1\geqq 0 \cdots \sin x\geqq 1/2 \cdots \pi/6\leqq x\leqq 5\pi/6$$

従って、$f(x)\leqq 0$となるxの範囲は次のようになる。

$\pi/6\leqq x\leqq 5\pi/6$ //

3.(3) 関数f(x)の不定積分を求める。

$$\int(2\sin^2 x-3\sin x+1)dx=\int\left(2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-3\sin x+1\right)dx$$

$$=\int(-\cos 2x-3\sin x+2)dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+2x+C$$

従って求める式は次のようになる。

$$\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+2x+C \quad (Cは積分定数)$$ //

No. 藤崎理奈

Date

3.(4) 前問(1)の解より, $a=\pi/6$, $b=\pi/2$ となる。これより S, T は以下のようになる。

$$S=\int_0^{\pi/6}\left|2\sin^2 x-3\sin x+1\right|dx=\int_0^{\pi/6}(2\sin^2 x-3\sin x+1)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+2x\right]_0^{\pi/6}=\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right\}-\{3\}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}-3$$

$$T=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left|2\sin^2 x-3\sin x+1\right|dx=-\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2\sin^2 x-3\sin x+1)\,dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos x+2x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=-\{\pi\}+\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

ここで S−T を計算する。

$$S-T=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}-3\right)-\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)=\pi-3$$

上式と与えられた条件 $\pi>3.14$ を用いると次の不等式が成立する。

$$S-T=\pi-3>3.14-3=0.14>0$$

$$S-T>0 \quad \therefore S>T$$

以上から $S>T$ が示される。 //

4.(1) 問題文中において1〜8か月目までの貯金額が示されているので、これらの総和を求める。

$$(5x+7y)+(2x+5y)+(2x+6y)+(2x+7y)+(4x+14y)$$
$$=(5x+7y)+(10x+32y)=15x+39y$$

従って8か月目までの貯金の総額は次のようになる。

$\underline{15x+39y}$ //

4.(2) 問題文で与えられている規則から$b_{n+1}$と$b_n$の関係式を立てると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&b_n=b_n \\
&b_n+y \quad \curvearrowleft +y \\
&b_n+2y \quad \curvearrowleft +y \\
&b_n+3y \quad \curvearrowleft +y \\
&b_{n+1}=2(b_n+3y) \quad \curvearrowleft \times 2
\end{aligned}$$

従って数列$\{b_n\}$の漸化式は$b_{n+1}=2b_n+6y$となる。
これより、この漸化式を解くと以下のようになる。

$$b_{n+1}=2b_n+6y \qquad ※特性方程式\ \alpha=6y/(1-2)$$
$$(b_{n+1}+6y)=2(b_n+6y) \qquad ※(b_n+6y)は公比2の等比数列$$
$$(b_n+6y)=2^{n-1}\cdot(2x+4y+6y) \qquad ※b_1=2x+4y$$
$$=2^{n-1}\cdot(2x+10y)$$
$$=2^n(x+5y)$$
$$b_n=2^n(x+5y)-6y$$

※この辺の式変形が分からない人は$d_n=b_n+6y$, $d_1=b_1+6y$とおくとよい。

以上から求める解は次のようになる。

$\underline{b_{n+1}=2b_n+6y,\quad b_n=2^n(x+5y)-6y}$ //

4.(3) 数列$\{c_n\}$を数列$\{b_n\}$を用いて表すと次のようになる。

$$c_n=\left(b_n\right)+\left(\frac{1}{2}b_n\right)+\left(\frac{1}{2}b_n-y\right)+\left(\frac{1}{2}b_n-2y\right)=\frac{5}{2}b_n-3y$$

数列$\{b_n\}$の一般項は前問で求めているので、これを代入し、整理する。

$$c_n=\frac{5}{2}\{2^n(x+5y)-6y\}-3y=5\cdot2^{n-1}(x+5y)-15y-3y$$
$$=2^{n-1}(5x+25y)-18y$$

以上から数列$\{c_n\}$の一般項は次のようになる。

$\underline{c_n=2^{n-1}(5x+25y)-18y}$ //

4.(4) これまでの解を用いて$S_{4n}$を計算する。

$$S_{4n}=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{2^{k-1}(5x+25y)-18y\right\}$$

$$=(5x+25y)\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}-18y\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=(5x+25y)\frac{2^n-1}{2-1}-18yn$$

$$=(2^n-1)(5x+25y)-18yn$$

また、$y=10$とおいて不等式$S_{24}(n=6)\geqq 30000$を解く。

$$S_{24}=(2^6-1)(5x+250)-180\cdot 6$$

$$=63(5x+250)-1080$$

$$=315x+14670$$

$$315x+14670\geqq 30000$$

$$21x\geqq 1022$$

$$x\geqq 48+2/3$$

上記の不等式を満たす最小の自然数$x$は$x=49$となる。

以上から求める解は次のようになる。

$$S_{4n}=(2^n-1)(5x+25y)-18yn$$

$$x=49$$

//