1.(1) 関数 $f(x)$ を微分すると次のようになる。

$$f'(x) = (1+\cos x + x\sin x)' = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x$$

$f'(x)=0$ が成立するためには、$x=0$ または $\cos x = 0$ となる必要がある。
$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において、$\cos x = 0$ を満たす x は $\pi/2$ となる。
以上から $f'(x)=0$ を満たす x は次のようになる。

$x = 0,\ \pi/2$ //

1.(2) 関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\pi/2$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\pi$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$1+\pi/2$	$\searrow$	0

この増減表より $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲における最大値・最小値は次のようになる。

最大値：$1+\pi/2$ $(x=\pi/2)$、最小値：0 $(x=\pi)$ //

1.(3) 定積分の計算を行う。

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}(1+\cos x + x\sin x)dx = \int_0^{\pi}(1+\cos x)dx + \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

$$= \left[x+\sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x(-\cos x)'dx$$

部分積分

$$= \left\{(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)\right\} + \left\{\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(x)'\cos x\,dx\right\}$$

$$= \pi + \left\{(-\pi\cos\pi)-(-0\cos 0)\right\} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= \pi + \pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi + \left\{\sin\pi - \sin 0\right\}$$

$$= 2\pi$$

以上から求める解は次のようになる。

$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\pi$ //

2.(1) 条件($a^2-b=0$)より $b=a^2$ となる。これを用いて関数$f(x)$を変形すると次のようになる。

$$f(x)=x^2+2ax+b=x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

これより不定積分の計算を行う。

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int\frac{1}{(x+a)^2}dx=-\frac{1}{x+a}+C$$ ※Cは積分定数

以上から求める解は次のようになる。

$$\underline{\int\frac{1}{f(x)}dx=-\frac{1}{x+a}+C} \quad //$$

2.(2) 関数$f(x)$が$f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$という形で表される場合、$f(-\alpha)=f(-\beta)=0$となる。これより次の式が成立する。

$$f(-\alpha)=\underbrace{(-\alpha)^2+2a(-\alpha)+b}_{\leftarrow f(x)=x^2+2ax+b}=\alpha^2-2a\alpha+b=\underbrace{0}_{\leftarrow f(-\alpha)=0}$$

二次方程式の解の公式を用いてαを求めると次のようになる。

$$\alpha=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4b}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

上記の議論は$f(-\beta)=0$の場合でも同様なので、次の式が成立する。

$$\alpha,\beta=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

条件($a^2-b>0$)より上式の値が複素数になる事はなく、また$\alpha>\beta$という条件から求める解は次のようになる。

$$\underline{\alpha=a+\sqrt{a^2-b},\ \beta=a-\sqrt{a^2-b}} \quad //$$

No. 藤柴理象

Date

2.(3) 被積分関数の部分分数分解を行う。A, Bという文字をおいて次のような式変形を考える。

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)}=\frac{A}{x+\alpha}+\frac{B}{x+\beta}=\frac{(A+B)x+(A\beta+B\alpha)}{(x+\alpha)(x+\beta)}$$

上式より、A, Bに関して次の連立方程式が成立しなければならない。

$$\begin{cases} A+B=0 \quad \cdots \ B=-A \\ A\beta+B\alpha=1 \quad \cdots \ A\beta+B\alpha=A\beta-A\alpha=A(\beta-\alpha)=1 \quad \cdots \ A=1/(\beta-\alpha) \end{cases}$$

上記連立方程式の解を用いて、被積分関数を変形すると次のようになる。

$$\frac{1}{f(x)}=A\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{a^2-b}}\left(\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\right)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left(\frac{1}{x+\beta}-\frac{1}{x+\alpha}\right)$$

これより不定積分の計算を行う。

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left(\frac{1}{x+\beta}-\frac{1}{x+\alpha}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left\{\int\frac{1}{x+\beta}dx-\int\frac{1}{x+\alpha}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left\{\log|x+\beta|-\log|x+\alpha|\right\}+C \quad ※Cは積分定数$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+\beta}{x+\alpha}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-b}}{x+a+\sqrt{a^2-b}}\right|+C$$

以上から求める解は次のようになる。

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-b}}{x+a+\sqrt{a^2-b}}\right|+C \quad //$$

No. 藤案理系

Date

3.(1) 初項 a_1 から第 $n+1$ 項 a_{n+1} までの和は次のように表す事ができる。

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

与式を用いて a_{n+1} について式を整理すると次のようになる。

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \{(n+1) - 1/2\, a_{n+1}\} - \{n - 1/2\, a_n\}$$

$$= -1/2\, a_{n+1} + 1/2\, a_n + 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 1/3\, a_n + 2/3$$

また、$S_1 = a_1$ となるので初項 a_1 を求めると次のようになる。

$$S_1 = 1 - 1/2\, a_1 = a_1, \quad \therefore\ a_1 = 2/3$$

以上から求める漸化式は次のようになる。

$$\underline{a_{n+1} = 1/3\, a_n + 2/3, \quad a_1 = 2/3} \quad //$$

3.(2) 実数 p をおいて、次式のような変形を考える。　特性方程式の話

$$a_{n+1} - p = 1/3\,(a_n - p) \quad \therefore\ a_{n+1} = 1/3\, a_n + 2/3\, p$$

上式が(1)で求めた漸化式と一致するためには $p=1$ である必要がある。
ここで新たな数列 $b_n = a_n - 1$ を考えると上式より $b_{n+1} = 1/3\, b_n$ となり、数列 b_n は等比数列である事が分かる。初項 b_1 は $b_1 = a_1 - 1 = -1/3$ となるので一般項は次のようになる。

$$b_n = -1/3\,(1/3)^{n-1} = -(1/3)^n$$

$b_n = a_n - 1$ であるから、数列 a_n の一般項は次のようになる。

$$\underline{a_n = 1 - (1/3)^n} \quad //$$

3.(3) 数列 a_n の極限を求めると次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1$$

従って求める解は次のようになる。

$$\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 1} \quad //$$

No. 藤生瑞希
Date

4.(1) 与式を変形すると以下のようになる。

$$w=(z-i)/(z+i) \cdots wz+iw=z-i \cdots z(w-1)=-i(w+1)$$
$$\cdots z=-i(w+1)/(w-1)$$

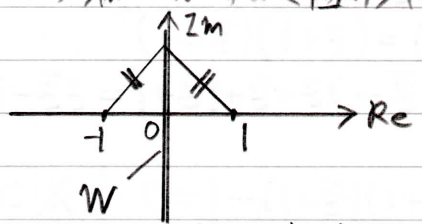
ここで、$w=1$と仮定すると与式は成立しないので、その式について不定形を考慮する必要はない。従って求める式は次のようになる。

$$\underline{z=-i(w+1)/(w-1)} \quad //$$

4.(2) 点zが原点を中心とする半径1の円上に存在する事から次式が成立する。

$$|z|=1 \cdots |-i(w+1)/(w-1)|=1 \cdots |-i|\cdot|w+1|=|w-1| \cdots |w+1|=|w-1|$$

上式から点wは実軸上の1及び−1からの距離が等しくなる点である事が分かる。これより点wが描く図形は直線で虚軸と一致する。 //



※$w=x+iy$とおくと$|w+1|=|w-1|$より次式が成立する。

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\cdots (x+1)^2+y^2=(x-1)^2+y^2$$
$$\cdots x^2+2x+1=x^2-2x+1$$
$$\cdots 4x=0$$
$$\cdots x=0$$

$x=0$のグラフは虚軸と一致する。

No. 藤堂瑛斗

4.(3) 点wが点$(-1+2i)$を中心とする半径2の円上に存在する事から次式が成立する。

$$|w-(-1+2i)|=2 \cdots \left|\frac{z-i}{z+i}-(-1+2i)\right|=2$$

$$\cdots \left|\frac{(z-i)-(z+i)(-1+2i)}{z+i}\right|=\frac{|z-i+z-2iz+i+2|}{|z+i|}$$

$$=\frac{2|z-iz+1|}{|z+i|}=2$$

$$\cdots |z-iz+1|=|z+i|$$

上式において絶対値が等しい事から各々の中身の共役を用いて次式を導く事ができる。

$$(z-iz+1)(\overline{z-iz+1})=(z+i)(\overline{z+i})$$

$$\cdots(z-iz+1)(\bar{z}+i\bar{z}+1)=(z+i)(\bar{z}-i)$$

$$\cdots z\bar{z}+iz\bar{z}+z-iz\bar{z}+z\bar{z}-iz+\bar{z}+i\bar{z}+1=z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1$$

$$\cdots z\bar{z}+z+\bar{z}=0$$

$$\cdots z\bar{z}+z+\bar{z}+1-1=(z+1)(\bar{z}+1)-1=0$$

$$\cdots(z+1)(\bar{z}+1)=(z+1)\overline{(z+1)}=|z+1|^2=1$$

※この変形に気づけるかが重要

$$\cdots|z+1|=1$$

以上から点zは実軸上の-1を中心とする半径1の円を描く。

※$z=x+iy$とおくと$|z-iz+1|=|z+i|$より次式が成立する。

$$\{(x+y+1)^2+(y-x)^2\}^{1/2}=\{x^2+(y+1)^2\}^{1/2}$$

$$\cdots x^2+2x(y+1)+(y+1)^2+x^2-2xy+y^2=x^2+(y+1)^2$$

$$\cdots x^2+2x(y+1)-2xy+y^2=0$$

$$\cdots x^2+2x+y^2=0$$

$$\cdots(x+1)^2-1+y^2=0$$

$$\cdots(x+1)^2+y^2=1$$

※円の方程式

$(x+1)^2+y^2=1$は$(-1,0)$を中心とする円である。

5.(1) 与えられたベクトルの内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} &= (0-0,\ 1-0,\ 1-0)\cdot(4\sqrt{2}-0,\ 0-0,\ 0-0)\\ &= (0,1,1)\cdot(4\sqrt{2},0,0) = 0\cdot4\sqrt{2}+1\cdot0+1\cdot0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} &= (0-0,\ 1-0,\ 1-0)\cdot(\sqrt{2}-0,\ 3t-0,\ -3t-0)\\ &= (0,1,1)\cdot(\sqrt{2},3t,-3t) = 0\cdot\sqrt{2}+1\cdot3t+1\cdot(-3t) = 3t-3t\\ &= 0\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OB}|\neq0$, $|\overrightarrow{OA}|\neq0$, $|\overrightarrow{OP}|\neq0$ であるから、$\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OP}$ はそれぞれ直交しており、$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$ の両方に対して垂直である事が分かる。//

5.(2) $\overrightarrow{AP}$ は次のように表される。

$$\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}-4\sqrt{2},\ 3t-0,\ -3t-0) = (-3\sqrt{2},\ 3t,\ -3t)$$

また、点Qは $\overrightarrow{AP}$ を2:1に内分する点なので $\overrightarrow{AQ}$ は次のように表される。

$$\overrightarrow{AQ} = 2/3\ \overrightarrow{AP} = (-2\sqrt{2},\ 2t,\ -2t)$$

これを用いると $\overrightarrow{OQ}$ は次のように表される。

分点の位置ベクトルの公式でもOK

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ} = (4\sqrt{2}-2\sqrt{2},\ 0+2t,\ 0-2t) = (2\sqrt{2},\ 2t,\ -2t)$$

ここで $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ} &= (-3\sqrt{2},\ 3t,\ -3t)\cdot(2\sqrt{2},\ 2t,\ -2t) = -12+6t^2+6t^2\\ &= 12(t^2-1)\end{aligned}$$

$t=t_0$ の時、$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は垂直、すなわち上式の値はゼロとなるので、$t_0^2=1$ とならなければならない。問題文より t は正の実数なので求める t_0 は次のようになる。

$t_0=1$ //

5.(3) 四面体OABPを三角形OAPを底面とした三角錐として考える。
三角形OAPの面積は次のようになる。

$$\begin{aligned}1/2\,|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{OQ}| &= 1/2\,|(-3\sqrt{2},3,-3)|\cdot|(2\sqrt{2},2,-2)| = 1/2\sqrt{18+9+9}\sqrt{8+4+4}\\ &= 1/2\cdot6\cdot4 = 12\end{aligned}$$

また、(1)より $\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$ に対して垂直であるから $|\overrightarrow{OB}|$ の値がそのまま三角錐の高さとなる。従って四面体の体積は次のようになる。

$$1/3\cdot12\cdot|\overrightarrow{OB}| = 4|(0,1,1)| = 4\sqrt{0+1+1} = 4\sqrt{2}$$

以上から求める値は次のようになる。

$4\sqrt{2}$ //